

DESARTICULACIÓN DE LAS PRAXEOLOGÍAS QUE SE PONEN EN JUEGO EN LOS TEXTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

DISMANTLING OF PRAXEOLOGIES TO PUT AT STAKE IN THE TEXTS OF CALCULATION DIFFERENTIAL AND INTEGRAL

PATRICIA ROJAS SALINAS*

Resumen

Los textos han sido un referente a lo largo de la historia de la Educación Matemática. Mientras que el profesor los utiliza para preparar las clases, citar teoremas y buscar ejercicios, los alumnos los requieren para estudiar los teoremas, revisar los ejercicios desarrollados junto con los mecanismos utilizados, y seleccionar del listado de ejercicios propuestos los que les parezcan más pertinentes para resolver. No obstante, en muchas oportunidades, las praxeologías presentadas en los textos son incompletas, lo que torna la revisión de textos, sea cual sea su uso, un simple repetir de técnicas de resolución. Esto provoca una desarticulación entre las tareas, los problemas, las técnicas construidas y utilizadas, y los aspectos descriptivos que las organizan.

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Praxeología, Organización Matemática (OM).

Abstract

Textbooks have been used as a reference throughout the history of mathematics education. While teachers use them to prepare lessons, quote theorems, and look for exercises; students need them to study theorems, check the solved exercises and their solving strategies, as well as select from the list of provided exercises

* Dr. (c) Enseñanza de las Ciencias, Matemática. Cálculo Diferencial e Integral. Departamento de Ciencias Básicas, Universidad del Bío-Bío. Chillán, Chile. E-mail: paes-rojas@gmail.com

those which seem most relevant. However, many times praxeology as presented in texts is incomplete; therefore, reviewing texts becomes a mere repetition of solving techniques. This leads to a lack of coordination between tasks, problems, techniques developed and used, and the descriptive aspects that organize them.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic (TAD), Praxeologies, Mathematical Organization.

Introducción

AL MOMENTO de planificar una asignatura, los libros de texto tienen gran influencia. Cada uno posee una perspectiva de los conceptos, la cual se ve reflejada en el orden que se da a estos, y en los ejercicios o ejemplos que se muestran en ellos. Estos conceptos son particulares y representan al autor. En ocasiones están orientados según los planes o programas de las asignaturas y, en otras, según la génesis de los conceptos matemáticos o su evolución histórica. Pero, ¿será esta la mejor manera de formar esquemas mentales que permitan llegar a los conceptos cuando se necesiten?, y ¿qué pasa si estas construcciones de instrumentos, que se consideran una ayuda al conocimiento matemático, sólo permiten crear un conocimiento mecanizado de las herramientas, dejando de lado la aplicación de estrategias de resolución de problemas?

En oportunidades, los textos trabajan únicamente con base en la repetición de un modelo prescrito por el profesor, o coayudado por los textos de mayor uso. Se recurre en la presente investigación a “La Teoría Antropológica de lo Didáctico” (en adelante, TAD), tomando de ella el constructo de praxeología (Chevallard, 1999).

La praxeología u organización matemática es la herramienta que permite modelizar en detalle las actividades de esta asignatura. Según Chevallard, Bosch y Gascón (1997), posee componentes fundamentales, tales como: las tareas, que corresponde a las problemáticas presentadas, y las técnicas, que refieren a la manera de realizar dichas tareas; de esta forma las tareas requieren de la existencia de técnicas para ser desarrolladas. Ambas conforman el bloque de la “praxis”, y estos tres elementos determinan el “saber-hacer”. Por otro lado, la tecnología,

definida como el discurso racional sobre la técnica, y la teoría, definida como el argumento formal que justifica a la tecnología, conforman el bloque del “logos”, un nivel teórico del “saber”. Por lo tanto, es importante tener presente que cualquier práctica requiere de un discurso interpretativo que permita justificarlo.

Introducir la noción de praxeología, también denominada organización matemática, constituye una herramienta fundamental desde la perspectiva de la TAD, puesto que logra modelizar la actividad matemática, uniendo los componentes del modelo: el componente teórico (el saber) y la praxis (el saber-hacer) (Barquero, 2009). Se espera, desde la TAD, describir la actividad matemática como una actividad humana, observando cómo los bloques antes mencionados son dispuestos, es decir, cómo son presentados y abordados en los libros de textos. Para ello, se analizará cómo han sido diseñados y gestionados los procesos didácticos.

Las organizaciones matemáticas (OM) que se analizarán corresponden a las siguientes preguntas:

Q_0 : ¿Cómo es presentado para su estudio el concepto de Derivada e Integral?

Q_1 : ¿Cómo son las tareas planteadas, las técnicas y tecnologías usadas en la resolución de problemas?

Q_2 : ¿Qué relación existe en ellas?

Para identificar las praxeologías se tomó en cuenta que el profesor, al usar los textos como herramienta de preparación para el trabajo de aula, se basa en estos elementos, los cuales influirán más tarde en su quehacer pedagógico e incluso, en oportunidades, son esas mismas reconstrucciones de saberes matemáticos las que se enseñan, siendo los libros de texto reales intermediarios entre los diseños curriculares y la práctica docente en aula.

Por lo tanto, el objetivo de este artículo es exhibir el análisis del fenómeno de la desarticulación del cálculo diferencial e integral desde el punto de vista de la institución, analizando las praxeologías que se ponen en juego en los textos usados en la universidad. Para lograrlo se desarrollaron varias actividades que serán abordadas en este escrito. La

metodología usada es de tipo Flexible, puesto que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en la cual se enmarca el análisis, tiene su propia metodología de investigación. No obstante, muchos de los instrumentos de recogida de datos se trabajaron bajo un paradigma cuantitativo.

La hipótesis planteada indica que las praxeologías presentadas y trabajadas en los libros de textos, usados tanto por estudiantes como por profesores, son incompletas.

Metodología

Se confeccionó una entrevista que permitió descifrar cuáles son los textos de mayor uso por los profesores de cálculo diferencial e integral, utilizados para la planificación de sus clases, construcción de guías de trabajo, búsqueda de teoremas, postulados, demostraciones, etc. y cuáles son los textos que mayormente recomiendan a sus estudiantes para trabajo autónomo o complementario de la clase.

El instrumento, una vez construido, se validó por juicio de expertos. Posteriormente se aplicó a 20 profesores que imparten la asignatura de cálculo diferencial e integral. Se les solicitó responder las siguientes preguntas: ¿cuáles son los tres textos que usa preferentemente para la planificación de un curso de cálculo diferencial e integral?, y ¿cuáles son los tres textos que mayormente recomienda a sus estudiantes de cálculo diferencial e integral?

Finalmente, se analizaron los tres textos más utilizados por los profesores según las entrevistas. En el análisis se observó qué tipo de problemas se plantean, las técnicas de resolución, los discursos, cómo son planteadas las teorías, cómo se interpretan las soluciones, qué tipos de relaciones se formulan, y si son realmente problemas o son sólo ejercicios. Además, se analizaron los teoremas más importantes, observando el lenguaje utilizado y la articulación entre los conceptos de derivadas e integrales. Los problemas planteados en los textos se caracterizaron según: tarea, técnica matemática, tecnología y teoría; separando así los bloques práctico-técnico y tecnológico-teórico. Además, se analizó la

cantidad de ejercicios resueltos en cada caso y los propuestos en cada uno de ellos.

Resultados

El siguiente gráfico muestra el resultado de la primera pregunta realizada: ¿Cuáles son los textos que usa preferentemente para la planificación de un curso de cálculo diferencial e integral?

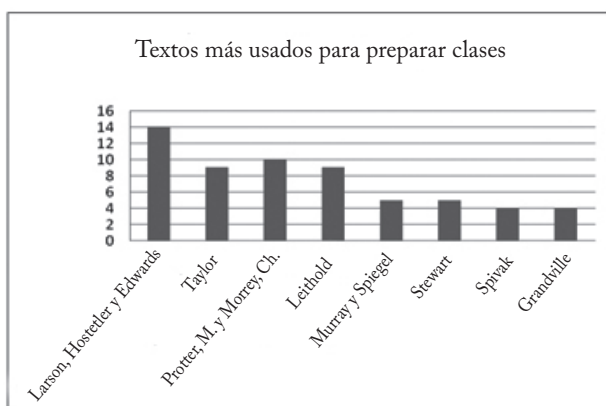


Figura 1. Resultado de entrevista a profesores, respecto a la pregunta: ¿Cuáles son los tres textos que más usa para preparar las clases?

Esto se confirma con los diálogos entablados con encargados de bibliotecas en las universidades respecto a los textos más solicitados. Estos datos permitieron centrar la búsqueda, partiendo, justamente, con los textos de mayor uso y siguiendo el orden de preferencia entregado por los profesores; no obstante, más adelante se intenta responder a cuestiones como ¿cuál es la razón del uso de uno u otro texto?

A modo de ejemplo, presentaremos el análisis que denominaremos Texto I (*Cálculo integral*, Larson, Hostetler y Edwards, 2009). Este

texto corresponde a la edición más actualizada y posee el siguiente orden en sus capítulos: “Los números reales”, “Funciones, límites y continuidad”, “Derivadas”, “Aplicaciones de la derivada hasta sucesiones” y “Series”.

Caracterizan esta edición del texto los problemas de exploración. El propósito de esta fase consiste en que los alumnos identifiquen un problema o pregunta que genere una discusión donde puedan explicitar sus conocimientos y preconcepciones sobre algún fenómeno en particular. Además, se abre el capítulo con una aplicación para la vida con el objetivo de gatillar la motivación extrínseca del estudiante. El texto sugiere el uso de calculadora para elaborar gráficas.

La forma en la cual se realizó el análisis indica que el bloque de técnica-tecnológico se sostiene en un bloque teórico-práctico. Las técnicas, por su parte, poseen carácter empírico, procedimental más que racional; por ejemplo, diremos que la regla de los cuatro pasos para derivar una función es una técnica.

Tecnología, por su parte, es la teoría de las técnicas. Son conocimientos de contenido racional que son transmisibles con cierto grado de precisión, por lo general a través de textos científicos, gráficos, tablas y representaciones funcionales variadas. Es un instrumento cuyo manejo implica ciertas destrezas que se conciben como técnicas; es decir, es una herramienta conformada por los objetos matemáticos, ordenados bajo una axiomatización, que integra las argumentaciones prácticas con las puramente teóricas. Un ejemplo de tecnología es el concepto. La teoría, por su parte, correspondería al análisis matemático.

De esta forma, se exhibe el estudio que se realizó con la primera sección del libro (todos los capítulos y todos los textos indicados por los profesores se desarrollaron de manera análoga). Se confeccionó una tabla para permitir un mejor análisis, de manera tal que, al observar la separación de los bloques y la cantidad de ejercicios resueltos en cada caso, podamos sacar alguna conclusión de lo que sucede con las praxeologías.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS	TEORÍA
<p>Identificar una recta tangente. (1 ejercicio)</p> <p>Encontrar la pendiente de: a) la gráfica $f(x)$ en un punto. (1 ejercicio) b) la gráfica paralela a la recta dada.(1 ejercicio) c) recta tangente a la gráfica de $f(x)$. (1 ejercicio)</p> <p>Calcular la derivada de $f(x)$ (3 ejercicios)</p>	<p>Los cuatro pasos:</p> <p>a) Dado $f(x)$ se incrementa x en Δx, como $f(x + \Delta x)$.</p> <p>b) Se hace la diferencia $f(x + \Delta x)$ con $f(x)$.</p> <p>c) Se divide la diferencia entre Δx y,</p> <p>d) Se aplica $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ para determinar la derivada en la forma $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$</p>	<p>Definición de la derivada de una función</p> $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$	<p>“Si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c y además existe el límite</p> $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} =$ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = m$ <p>entonces, la recta que pasa por $(c; f(c))$ y cuenta con una pendiente m, es la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(c; f(c))$”.</p> <p>La derivada de f en x viene dada por</p> $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ <p>Siempre que exista ese límite.</p> <p>Para todos los x para los que exista este límite, f' es una función de x.</p> <p>derivable que implica continua: si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.</p>

Figura 2. Sección 1 del Texto I: “La derivada y su interpretación geométrica”.

La revisión de la sección 1 del texto I entrega 8 ejercicios guía desarrollados paso a paso. En ellos se muestra claramente tres tipos de tareas para una misma técnica. Además, se usa la noción de límite, como es común encontrar en otros textos. Cuenta con 104 ejercicios que deben realizarse con el uso de la técnica descrita.

El texto parte con el análisis de la derivada y su interpretación geométrica, presentando una noción histórica de trabajos matemáticos del siglo XVII, y refiriéndose a la noción de límite dispuesta en problemas como: la recta tangente, la velocidad y aceleración, máximos-mínimos y área.

La noción de límite prevalece en la definición de recta tangente y derivada de una función. Esto se ve reflejado en los ejemplos que presentan la utilidad de la derivada para calcular ritmos de cambio, mencionando una función de velocidad y posición. Además, si bien los teoremas se demuestran usando límites, se promueve el cálculo de las

derivadas, no utilizando el uso directo de la definición de límites, sino el mecanismo de estos.

En el Texto I no se observa relación directa entre la derivada y su función inversa, lo que induce a pensar que trabaja los conceptos totalmente aislados. Esto repercute en el aprendizaje del estudiante, ya que no podrá contextualizar problemas que involucran ambas concepciones.

Es característica en el texto una cercanía entre la técnica y la tecnología, evidenciada en los ejemplos y su resolución. Si bien hay una concordancia en el orden, al presentarse la antiderivada que permite al lector adentrarse en la búsqueda del conocimiento, los ejemplos y problemas planteados no son más que ejercicios que carecen de discusiones, y no otorgan la posibilidad al lector de avanzar en el conocimiento a no ser de forma funcional. Por ejemplo, se promueve la utilización de la descomposición de funciones compuestas, pero su uso es mecánico.

Se observa que es un texto que permite al estudiante, por su gran cantidad de ejercicios, impregnarse de los teoremas. Sin embargo, al analizar los bloques técnicos nos damos cuenta que tienden a mecanizar las respuestas usando teoremas fijos, sin permitir que el lector realice deducciones o responda usando otras nociones matemáticas.

Al analizar el bloque de lo tecnológico observamos teoremas fijos: no existe un descubrir de concepciones, sino estándares de resolución, no hay búsqueda de modelos matemáticos, sino modelos impuestos.

El Texto 2 corresponde a *Cálculo diferencial e integral* (Taylor y Wade, 2012), escrito por Howard Taylor alrededor de 1960, que por su uso ha sido reeditado constantemente (se analiza su versión 2012). Es en el capítulo ocho donde se presenta una especie de conexión entre derivadas e integrales, cuando se refiere a la antiderivada. El autor permite al lector encontrarse con una operación inversa que permitirá contextualizar de mejor manera tanto el concepto de derivada como el de integral, permitiendo un mejor análisis en los apartados siguientes. Es común ver en el texto que luego de un teorema se presenta un ejemplo que permite resolver mediante el reemplazo de los datos en el teorema. Si bien hay una concordancia en el orden del texto que per-

mite al lector adentrarse en la búsqueda del conocimiento, los ejemplos y problemas planteados son ejercicios que carecen de discusiones. Se avanza en el conocimiento de forma funcional. La demostración de la mayoría de los teoremas se realiza usando las nociones de límites. Esto significa que quien lo esté usando necesita tener mucha claridad en el uso y aplicación de estos conceptos. En algunos ejemplos la técnica y la tecnología van muy de la mano, no obstante, el uso de estas es de carácter mecánico, es decir, el “logos” y la “praxis” aparecen muy unidos, pero carecen del ‘elaborar’ o ‘discutir’, quedándose en el plano del ‘resolver’. Es característico en el texto una cercanía entre la técnica y la tecnología, evidenciado en los ejemplos y su resolución.

El denominado Texto 3 (Protter y Morrey, 1986) *Cálculo con geometría analítica* (tercera edición) es de especial interés para estudiantes de ciencias e ingeniería. Abarca las necesidades de un curso de cálculo de tres semestres de extensión y consta de 18 capítulos partiendo por “Desigualdades, relaciones, funciones y gráficas” hasta “Integración múltiple”. Este texto presenta un continuo entre las concepciones de derivada y su inversa o antiderivada; no obstante, se podría aprovechar mucho más esta relación al resolver problemáticas que involucren el cálculo de integrales. Se observa que es un texto que permite al estudiante, por su gran cantidad de ejercicios, impregnarse de los teoremas. Sin embargo, al analizar los bloques técnicos se evidencia una tendencia a mecanizar las respuestas usando teoremas fijos, sin permitir que el lector realice deducciones o responda usando otras nociones matemáticas. Al analizar el bloque de lo tecnológico se observan teoremas fijos: no un descubrir de concepciones, sino estándares de resolución.

Del mismo modo, se revisaron todos los capítulos y los otros textos. En general, son textos de uso automático, con tendencia a la repetición de teoremas observada en la forma de plantear los ejercicios, ya que estos solicitan resolver, calcular y determinar, sin permitir la deducción por parte del lector, tendiendo a mecanizar las técnicas matemáticas.

Conclusiones en el análisis de los textos

Como se indicó anteriormente, en el análisis se llevó a cabo una revisión exhaustiva de todos los capítulos y todos los textos enunciados por los profesores. La construcción de tablas permitió revisar de manera visual la separación de los bloques en los cuales se evidencia que no existe una búsqueda de modelos matemáticos, sino una exhibición de modelos estructurados, incitando tal vez, involuntariamente, un aprendizaje memorístico más que significativo. Además, se observó que los textos son muy similares en lenguaje, estructura y ejercicios.

Si bien los teoremas presentados en los textos son suficientes para la resolución de los ejercicios, estos se remiten a calcular, resolver, determinar y demostrar, pero carecen del discutir, evaluar, comprender, analizar y crear (Mayorga Fernández, Gallardo Gil y Jimeno Pérez, 2015). Se espera que en este momento de nuestras vidas o, más real aún, en este encuentro con el cálculo, seamos capaces de idear, diseñar o tal vez construir elementos gracias a los conceptos. La necesidad está en llevar el conocimiento a un mayor nivel de abstracción y esto no se incita en los textos revisados.

Se recomienda, entonces, reorganizar las organizaciones matemática, de manera tal que las tareas sugeridas sean resueltas mediante la elaboración de nuevas técnicas. Las tecnologías en los textos van al encuentro con la técnica, es decir, el nivel de la praxis no aparece muy alejado del nivel del logos; no obstante, como los ejemplos son planteados en un nivel básico del pensamiento, así serán reproducidos tanto por profesores como por estudiantes. Se espera limitar la desarticulación entre los bloques “práctico-técnico” y “tecnológico-teórico”, para así obtener una mejora en el aprendizaje, permitiendo al estudiante recorrer el camino de las organizaciones matemáticas previstas para su estudio.

Para concluir, se reconocen los textos como una herramienta en la enseñanza de las matemáticas; sin embargo, se considera de suma importancia no desvincular a los estudiantes de su entorno y verlos como constructores de conocimiento, capaces de construir praxeologías lo más completas posibles, integrando las tareas, técnicas, tecnologías y teoría en su aprendizaje.

Referencias

- Barquero, B. (2009). Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsor.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Larson, R. Hostetler, R. Edwards, B. (2009). *Cálculo integral*. México: McGraw-Hill.
- Mayorga Fernández, M. J., Gallardo Gil, M. y Jimeno Pérez, M. (2015). Evaluación diagnóstica en Andalucía: Una investigación del área competencia matemática. *Aula Abierta*, 43(1), 47-53.
- Protter, M. Morrey, Ch. (1986). *Cálculo con geometría analítica*, E.U.A.: Addison Wesley Iberoamericana, S.A.
- Taylor, H. y Wade, T. (2012). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa S.A.

Recibido: 11.12.15. Aceptado: 02.10.16