Paideia Nº 65 (133-160), julio-diciembre 2019 ISSN 0716-4815 (impreso) / ISSN 2452-5154 (online)

https://doi.org/10.29393/Pa65-14EAAM20014

APLICACIÓN DE UNA METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA QUE USA EL MODELAMIENTO MATEMÁTICO ENMARCADO EN LA TEORÍA DEL CICLO DE KOLB, PARA ABORDAR EL CONTENIDO DE FUNCIÓN CUADRÁTICA

A TEACHING METHODOLOGY THAT USES MATHEMATICAL MODELING FRAMED IN THE THEORY OF THE KOLB CYCLE, TO INTRODUCE THE CONTENT OF QUADRATIC FUNCTION

Esteban Aros Sánchez*, Marianela Castillo Fernández**

Resumen

La siguiente investigación analiza la implementación de una propuesta didáctica para abordar el contenido de función cuadrática con estudiantes de enseñanza media de un Liceo Científico-Humanista municipal, de la provincia del Biobío. La propuesta consiste en una actividad de Modelamiento Matemático enmarcada en el Ciclo de Kolb, que se desarrolló a lo largo de tres sesiones de trabajo.

La recopilación de información se realizó mediante las producciones de los estudiantes sometidos a la experiencia y las notas de campo de los investigadores. El análisis posterior se basa en la Teoría Fundamentada.

La metodología de enseñanza utilizada resultó ser efectiva para introducir el concepto de función cuadrática, se observó un alto compromiso de los estudiantes por el desarrollo de las actividades, pero hubo dificultades en cuanto a lograr que los estudiantes trabajen de forma autónoma.

* Esteban Aros Sánchez, Profesor de matemáticas y Educación Tecnológica. Escuela de Educación. Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles, email: profesteban.lbla@gmail.com

** Marianela Castillo Fernández, Magíster en Matemática. Escuela de Educación. Universidad de Concepción, Campus Los Ángeles, email: mcastillo@udec.cl

En el transcurso de la experiencia los estudiantes logran recorrer las cuatro etapas de Ciclo de Kolb, construyendo un modelo matemático de una situación en contexto y dando respuesta a un problema.

Palabras clave: Modelización, aprendizaje a través de la experiencia, observación, conceptualización, experimentación y método de aprendizaje

Abstract

The current research analyzes the implementation of a didactic proposal to address the quadratic function content with high school students from a state-run scientific-humanist secondary school in the Biobío province. The proposal consists of a Mathematical Modeling activity framed in the Kolb Cycle, which took place over three working sessions.

The data collection was carried out through the productions of the students submitted to the experience and field notes of the researchers. Further analysis is based on Grounded Theory.

The teaching methodology used turned out to be effective in introducing the concept of quadratic function, a high commitment to the development of the activities was observed among the students, but there were difficulties in getting the students to work independently.

In the course of the experience, the students manage to go through the four stages of the Kolb Cycle, building a mathematical model of a situation in context and responding to a problem.

Keywords: Modeling, learning through experience, observation, conceptualization, experimentation and learning method

1. Introducción

La labor de los profesores no es algo trivial, así lo afirman Díaz y Barriga (2010), sino que, por el contrario, es fundamental para el desarrollo de la persona y con ello, de la sociedad. En esto radica la importancia de buscar y/o crear nuevas metodologías que contribuyan a la labor docente, en cuanto a guiar a los estudiantes a construir aprendizajes significativos. En este proceso de búsqueda y creación de nuevas metodologías de enseñanza, surgen los aportes de David Kolb y Ronald Fry, quienes en la década de los 70 plantean el Modelo de Aprendizaje Experiencial, conocido comúnmente como Ciclo de Kolb. En este ciclo se plantean cuatro etapas que los estudiantes deben recorrer para lograr analizar una situación problemática contextualizada y dar una solución pertinente a dicho problema.

Es necesario clarificar el uso de los términos Modelo y Modelar. Para esta investigación se entenderá que un modelo es un arquetipo, punto de referencia, representación, o esquema teórico de una realidad compleja, de un sistema, de un proceso o parte natural o artificial, que se elabora para mejorar su comprensión y el estudio de su comportamiento. Cuando dicha representación o esquema teórico corresponde a un objeto matemático, se denomina Modelo Matemático, por tanto, en el marco de esta investigación se considerará al Modelo Matemático como resultado del proceso de Modelamiento Matemático. Según el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2015), Modelar es construir un modelo físico o abstracto que capture parte de las características de una realidad para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla; asimismo, este modelo permite buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades (objetos, fenómenos, situaciones, etc.), estimar, comparar impactos y representar relaciones.

Aravena (2011) señala que, desde el punto de vista del aprendizaje, realizar una enseñanza, considerando las acciones propias del Modelado Matemático, repercute en un buen desempeño matemático posterior de los estudiantes. Al construir modelos, los estudiantes descubren regularidades y son capaces de expresarlas fluidamente, transitando de un lenguaje simple a uno más formal; además, desarrollan la creatividad, la capacidad de razonamiento, de resolución de problemas y determinan soluciones que pueden transferir a otros contextos (MINEDUC, 2015).

Es necesario clarificar que, si bien el contenido de función cuadrática en las bases curriculares de 7° básico a 2° medio del año 2015 se plantea en 2° año medio, para el momento de aplicación de esta investigación, el Liceo en estudio lo trabajó en 3° medio, dicha situación se condice con la dificultad permanente de no cubrir todos los objetivos del currículum a costa de una mayor profundidad, o abordar el máximo de objetivos sin el tiempo y rigurosidad que requiere cada uno de ellos, en otras palabras, se manifiesta la flexibilidad necesaria para adecuarse al contexto de los estudiantes del Liceo, pero se renuncia a la cobertura (Edecsa Asesorías y Estudios, 2018).

En este artículo se presenta una experiencia de aula, en la que se utilizó el Modelado Matemático para promover el aprendizaje de la función cuadrática, el efecto en el aprendizaje ha sido observado por medio del Ciclo de Kolb en términos de transición cognitiva y procedimental de los estudiantes. Se incorporan en este artículo los antecedentes que señalan la necesidad de utilizar este tipo de metodología de enseñanza, el problema abordado, el objetivo de la investigación, un marco referencial con los conceptos y teoría requerida para elaborar las guías de trabajo, un marco metodológico, la descripción de las actividades y finalmente las conclusiones recabadas por medio de la investigación.

2. Planteamiento del problema

2.1 Sobre el uso del Modelamiento Matemático y Formas Evaluativas en la Educación Media Chilena

En Chile, existe una desatención al trabajo de modelos y aplicaciones en todos los niveles de enseñanza, en particular en la formación de profesores esta metodología de trabajo es poco considerada, con lo cual, implementar un trabajo matemático basado en situaciones de Modelamiento Matemático puede ser un medio potente en la formación de profesores, permitiéndole al docente en su futuro laboral ayudar a los estudiantes del sistema educativo a superar las dificultades y obstáculos que enfrentarán como ciudadanos de una sociedad cambiante, en especial para aquellos más desfavorecidos socioculturalmente (Aravena, 2011).

Los sistemas evaluativos en Chile se han manejado por años en la línea tradicional; donde predominan fuertemente las pruebas de papel y lápiz. En la actualidad, los sistemas demandan reorientaciones con nuevas formas de enseñanza más activas y eficaces, donde lo más importante es enseñar a los estudiantes a construir su propio conocimiento. Una visión moderna de la matemática no solo debe atender a una formación teórica que se justifica por sí misma, sino también a una de índole crítico y comunicativo-social mediante la regulación continua (Aravena, Caamaño, y Giménez, 2008).

Esta forma de trabajo arraigada en los sistemas educativos chilenos conlleva que los estudiantes no logren desarrollar capacidades y competencias requeridas para enfrentarse a una sociedad en cambio permanente (Aravena, 2011).

En el documento Aprendiendo de los Errores, la Agencia de Calidad de la Educación (2017) plantea que, de acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes chilenos de 2° año medio en el Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) de matemática a preguntas que evalúan el modelamiento algebraico, se estima que cerca de un tercio de ellos presenta dificultades para interpretar y representar algebraicamente situaciones que involucran una cantidad fija y una variable. Este grupo de estudiantes, frecuentemente, confunde los datos que son fijos y los que son variables y, por tanto, establece una relación algebraica errónea. Se señala también que los estudiantes presentan errores, en preguntas que requieren identificar una relación entre dos variables; donde buscan una regularidad en el comportamiento de una de las variables sin hacer la relación con la otra, y asumen que esta es la relación entre ambas. Los problemas para identificar y expresar relaciones se transfieren a diferentes sistemas numéricos.

De acuerdo con las respuestas entregadas por estudiantes de 2° medio a preguntas que involucran la resolución de problemas, se estima que más de un tercio de ellos no interpreta la situación planteada. Este grupo de estudiantes, frecuentemente, tendría dificultades para interpretar correctamente los problemas en los que debe idear un procedimiento para resolverlos.

También se presentan errores en preguntas que requieren interpretar los resultados que obtienen al resolver problemas; donde cerca de un quinto de los estudiantes se quedaría con el resultado matemático sin interpretarlo de acuerdo con la situación específica que se resolvió.

3. Objetivo de la investigación

El objetivo de la investigación es explicar la implementación de una propuesta de enseñanza que utiliza el modelamiento matemático basado en el Ciclo de Kolb, para el contenido de función cuadrática en estudiantes de enseñanza media de un liceo científico-humanista municipal de la Provincia del Biobío, analizando la experiencia desde el punto de vista del desarrollo de las etapas del Ciclo de Kolb.

4. Marco referencial

4.1 Modelo de Aprendizaje Experiencial, Ciclo de Aprendizaje de Kolb

El Modelo de Aprendizaje Experiencial, desarrollado por David Kolb y Ronald Fry a principios de los años setenta, está formado por cuatro elementos fundamentales: Experiencia Concreta (EC), Observación Reflexiva (OR), Conceptualización Abstracta (CA) y Experimentación Activa (EA), los cuales constituyen una espiral de aprendizaje que puede comenzar en cualquiera de los cuatro elementos, pero que usualmente inicia con la experiencia concreta. De manera simplificada, este modelo se denomina Ciclo de Kolb (Sandoval et al., 2014). A continuación, se presenta una breve descripción de cada una de las etapas.

- *Experiencia Concreta*: el estudiante experimenta y es llevado a interactuar con un entorno físico.
- *Observación Reflexiva*: el estudiante debe buscar recursos, valerse de sus conocimientos previos y habilidades, que posteriormente le faciliten encontrar una solución al problema.
- *Conceptualización Abstracta*: el estudiante es inducido a relacionar lo previo y usarlo con habilidad para estructurar el diseño de una solución.
- *Experimentación Activa*: el estudiante retorna a la experiencia concreta de origen, o bien a una similar, en la cual es evaluado el aprendizaje obtenido.

En este modelo el aprendizaje es concebido como un proceso, más que como un producto.

De este modo, nuevos conocimientos, habilidades, o actitudes se alcanzan a través de la confrontación entre cuatro modos de aprendizaje experiencial. En efecto, los estudiantes para ser efectivos deben desarrollar cuatro tipos diferentes de habilidades: la habilidad de vivir experiencias concretas, la habilidad de observar reflexivamente, la habilidad de conceptualizar de manera abstracta, y la habilidad de experimentar activamente Sandoval, et al. (2014).

4.2 Modelamiento Matemático

El Modelamiento Matemático es un ciclo cuyo objetivo es construir un modelo matemático de una entidad real que posea la capacidad de ser observable y medible, directa o indirectamente Sandoval, et al. (2014).

Según Sandoval et al. (2014), el ciclo de Modelamiento Matemático se caracteriza por:

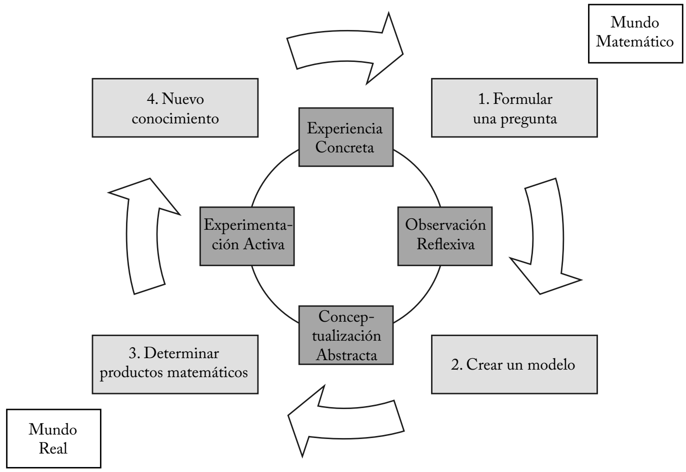
- Comenzar con un ambiente o pregunta que sea de interés para el estudiante, donde deba identificar y simplificar las variables, mejorando la formulación de la pregunta.
- Realizar un proceso de representación, donde el estudiante identifique o formule el objeto matemático que mejor capture las relaciones entre las variables, creando así un modelo matemático.
- Manipular el modelo planteado, valorando y transformando el modelo original en uno más simple.
- Generar un nuevo conocimiento, descubriendo nuevas relaciones entre las variables, formulando nuevas estrategias y comparando la nueva información con el problema original, y en caso de haber mucha discrepancia se repite todo o parte del proceso.

El ciclo de Modelamiento Matemático describe dos tipos de mundos: el mundo real, y el mundo matemático. El mundo real configura un entorno matemático, el cual debe ser observable y medible, esto es, accesible al estudiante mediante el uso de sus sentidos naturales; mientras que el mundo matemático considera la posibilidad de representaciones abstractas, las que hacen uso de recursos cognitivos básicos (repetir, memorizar, etc.), y avanzados (deducir, conjeturar, demostrar, etc.) (Sandoval, et al., 2014).

4.3 Ciclo de Modelamiento Matemático vs Ciclo de Kolb

Sandoval et al. (2014) afirman que el ciclo de Modelamiento Matemático se corresponde con el modelo de aprendizaje experiencial, toda vez que sus cuatro etapas se pueden vincular naturalmente con los cuatro elementos constitutivos del ciclo de Kolb. En efecto, entre la experiencia concreta y la observación reflexiva se requiere la formulación de una pregunta de investigación (Etapa 1 del ciclo de modelado). Por otro lado, la formulación o propuesta de un modelo matemático (Etapa 2 del ciclo de modelado) puede ser vista como un paso intermedio entre la observación reflexiva y la conceptualización abstracta, de tal modo que el objeto matemático en sí mismo constituye un tipo o forma de conceptualización abstracta avanzada. El estudio analítico, numérico, cualitativo o computacional del modelo matemático genera nuevos productos matemáticos (etapa 3 del ciclo de modelado), los que permiten la intervención de la realidad en un marco de experimentación activa, trayendo como consecuencia nuevo conocimiento (etapa 4 del ciclo de modelado) que permite enriquecer la experiencia concreta. Ver figura 1.

Figura 1. Relación entre el ciclo de Modelado Matemático y el ciclo de Kolb



Fuente: Elaboración de los autores

5. Marco metodológico

La intervención consiste en la puesta en práctica de tres actividades derivadas de una misma experiencia, que fueron adaptadas de su versión original en el trabajo de Sandoval et al. (2014), para abordar el contenido de función cuadrática con estudiantes de enseñanza media. El objetivo de estas actividades es que los estudiantes elaboren, a través de ellas, un modelo matemático de una situación en contexto, que pueda dar respuesta a un problema planteado inicialmente. Los pasos para realizar la actividad están relacionados con las etapas que plantea el Ciclo de Kolb.

La investigación realizada es de tipo descriptiva, pues como lo afirman Hernández et al. (2010), especifica propiedades, características y rasgos importantes de la aplicación de una metodología de enseñanza basada en el modelamiento matemático enmarcada en el Ciclo de Kolb con estudiantes de un liceo municipal.

El profesor asume un rol de guía y facilitador del aprendizaje, proporciona las guías de trabajo y materiales a los estudiantes (hoja milimetrada y regla) y distribuye al curso en parejas de trabajo, las que proseguirán hasta el término de la experiencia. Se busca, por tanto, que el profesor por medio de situaciones planificadas logre llevar al estudiante al descubrimiento, y de esta forma generar aprendizaje en él (Coll, 1988). Por otro lado, Sarmiento (2004) afirma que el conocimiento y la experiencia de los demás posibilitan el aprendizaje del individuo; por lo que se debe procurar que las interacciones con ellos sean ricas y amplias.

5.1 Población

La población estudiada está compuesta por los estudiantes de 3° año medio de un liceo científico humanista de la Provincia del Bío-Bío. Dichos estudiantes, casi en su totalidad, comenzaron su educación media en este establecimiento en 7° básico, en el año 2013, por tanto, todos han seguido el mismo proyecto educativo institucional y los lineamientos del Departamento de Matemática del establecimiento.

5.2 Muestra

La muestra es no probabilística, dado que el curso seleccionado para la experiencia fue elegido por un directivo del establecimiento. El grupo está conformado por 38 estudiantes, de los cuales 13 son varones y 25 son damas.

5.3 Recolección y Análisis de la Información

La información que se analiza en esta investigación se obtuvo de los informes elaborados por los estudiantes a partir de tres guías de trabajo, en las cuales se les conduce a resolver un problema mediante la creación de un modelo matemático de una situación contextualizada.

Para recoger información sobre el clima del aula y otros elementos relevantes se analizan las notas de campo, tomadas por los investigadores durante el desarrollo de las tres actividades.

Basados en el diseño de la teoría fundamentada, se elabora un resumen con las producciones de los estudiantes, agrupando categorías según las unidades de análisis emergentes.

6. Sobre la intervención

La intervención consistió en tres sesiones de trabajo que se diseñaron para introducir los conceptos que corresponden el contenido curricular de función cuadrática, de tal forma que las actividades de modelización matemática enmarcadas en el Ciclo de Kolb, sirvan de punto de referencia para el proceso de enseñanza. La institucionalización de los contenidos se realiza luego de las actividades de modelado, pero esta no es motivo de análisis del presente artículo.

Cabe mencionar que, en el desarrollo de las actividades, los pasos del Ciclo de Kolb no se llevan a cabo de forma secuencial, tal como se enuncian en el Ciclo, pero sí se transita por cada uno de ellos.

Uno de los pilares del aprendizaje experiencial es el desarrollo de la creatividad como herramienta para abordar situaciones problemáticas. Sin embargo, dada la poca experiencia que tenían los alumnos en el trabajo autónomo, fue necesario diseñar las actividades de tal manera que pudieran seguir un hilo conductor que los llevara a la solución del problema planteado. Por la misma razón, no se consideró una situación de la vida real para la construcción del modelo, sino más bien, se plantea un problema en un contexto idealizado.

6.1 Actividades Propuestas a los Estudiantes

Se les presentó a los estudiantes el siguiente problema:

Se requiere realizar un tendido eléctrico para llevar electricidad a las casas A y B desde un transformador a ubicar en algún punto C de un segmento $\overline{PQ}$. Los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PQ}$ son perpendiculares, al igual que los segmentos $\overline{BQ}$ y $\overline{PQ}$. Se debe determinar la ubicación del punto C de modo que la suma de las distancias de A a C y de C a B sea la mínima posible.

Junto con este enunciado se les presenta a los estudiantes la Figura 2. Para resolver el problema, se les pide que realicen las actividades detalladas. A continuación, los estudiantes trabajaron en parejas, determinadas por ellos mismos, con lo cual se formaron 19 grupos de trabajo.

La siguiente tabla resume los objetivos, contenidos, conceptos previos y materiales necesarios en cada sesión de trabajo.

Tabla 1. Objetivos, contenidos, conceptos previos y materiales necesarios

	Sesión 1	**Sesión 2**	**Sesión 3**
Objetivo	Resolver un problema por medio de la representación de una situación en contexto, utilizando materiales concretos.	Asociar la recopilación de datos obtenidos de forma experimental con una función cuadrática como modelo matemático de la situación.	Validar la solución al problema, graficando la función cuadrática obtenida como modelo matemático de la situación, utilizando un software matemático.

Contenidos	Representación de situaciones en contexto. Optimización.	Definición de función cuadrática, parábola como gráfica de la función cuadrática, vértice de la parábola, modelización con función cuadrática.	Definición de función cuadrática, parábola como gráfica de la función cuadrática, vértice de la parábola, modelización con función cuadrática.
Conceptos previos	Medición, Gráficos en el plano cartesiano	Teorema de Pitágoras, gráfica de una función en el plano cartesiano.	Gráfica de una función en el plano cartesiano.
Materiales	3 hojas de papel milimetrado, regla, lápiz grafito, lápices de colores, goma	3 hojas de papel milimetrado, calculadora, lápiz grafito, goma.	Computador provisto de un software que grafique funciones cuadráticas.

Fuente: Elaboración de los autores

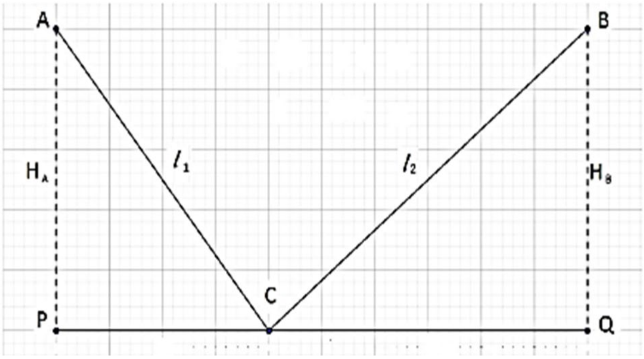
7. Resultados de la investigación

7.1 Sesión 1

7.1.1 Producciones de los Estudiantes

Para realizar esta actividad, se conssegmento $\overline{PQ}$ de medida de medida 10 cm, y se solicita a los estudiantes que realicen un dibujo esquemático del problema en las hojas milimetradas, basado en el esquema que se les presenta, junto con el enunciado del problema, considerando los siguientes casos: $H_A = H_B$, $H_A < H_B$ y $H_A > H_B$, donde H_A es la distancia de A a P y H_B es la distancia de B a Q (Ver Figura 2). Los estudiantes son quienes deciden dónde ubicar los puntos A y B, considerando los casos anteriormente mencionados. La siguiente figura esquematiza el caso $H_A = H_B$.

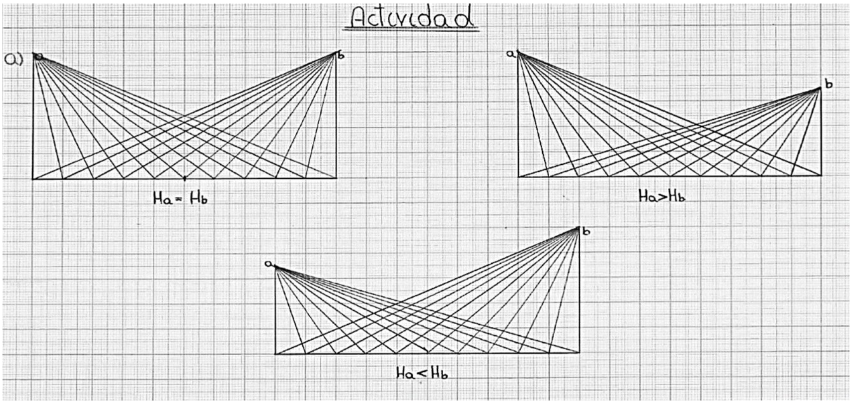
Figura 2. Representación esquemática del problema presentada a los estudiantes



Fuente: Elaboración de los autores

Todos los estudiantes completaron este punto satisfactoriamente, realizando un dibujo esquemático que permite resolver un problema como el que se muestra en la Figura 3.

Figura 3. Producción de los estudiantes



Fuente: Elaboración de los sujetos de estudio

Para cada uno de los casos mencionados anteriormente se pidió a los estudiantes que graduaran el segmento $\overline{PQ}$ desde 0 hasta 10 cm (centímetro por centímetro) y que ubicaran el punto C en cada una de estas posiciones (Figura 3). Posteriormente, debían medir las distancias l_1 y l_2 con regla y registrar sus resultados en una tabla. Todos los estudiantes desarrollaron este punto satisfactoriamente, completando la tabla como se muestra en la Figura 4.

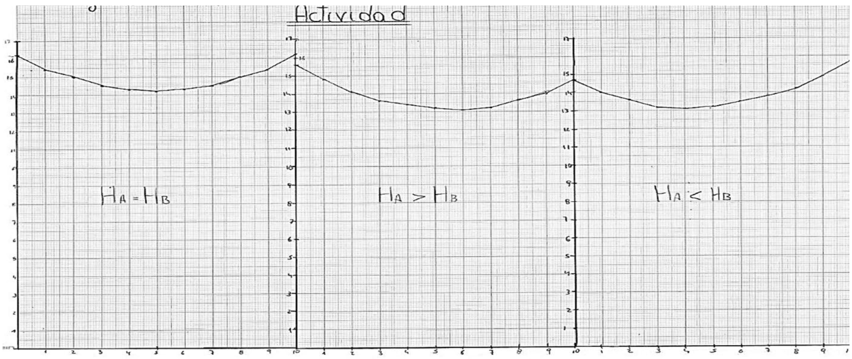
Figura 4. Producción de los estudiantes

	$H_A = H_B$				$H_A > H_B$				$H_A < H_B$			
C	ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$\ell_1^2 + \ell_2^2$	ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$\ell_1^2 + \ell_2^2$	ℓ_1	ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$\ell_1^2 + \ell_2^2$
0	5	11,2	16,2	150,44	5	10,6	15,6	137,36	3,5	11,2	14,7	137,69
1	5,1	10,3	15,4	132,1	5,1	9,7	14,8	120,1	3,7	10,3	14	119,78
2	5,5	9,5	15	120,5	5,4	8,7	14,1	104,85	4,1	9,5	13,6	107,06
3	5,9	8,6	14,5	108,77	5,8	7,8	13,6	94,48	4,6	8,6	13,2	95,12
4	6,5	7,8	14,3	103,09	6,4	7	13,4	89,96	5,3	7,8	13,1	88,93
5	7,1	7,1	14,2	100,82	7,1	6,1	13,2	87,62	6,1	7,1	13,2	87,62
6	7,8	6,5	14,3	103,09	7,8	5,3	13,1	88,93	7	6,5	13,5	91,25
7	8,6	5,9	14,5	108,77	8,6	4,6	13,2	95,12	7,9	5,9	13,8	97,22
8	9,5	5,5	15	120,5	9,5	4,1	13,6	107,06	8,8	5,4	14,2	106,6
9	10,3	5,1	15,4	132,1	10,3	3,7	14	119,78	9,7	5,2	14,9	121,13
10.	11,2	5	16,2	150,44	11,2	3,5	14,7	137,69	10,7	5	15,7	139,49

Fuente: Elaboración de los sujetos de estudio

Luego, los estudiantes debían graficar los puntos (C, $l_1 + l_2$). Todos se dieron cuenta que debían considerar escalas diferentes para graduar los ejes coordenados. Se les dio la libertad para que cada grupo decidiera la mejor forma de graduar sus ejes. De los 19 grupos, 18 graficaron correctamente los valores, y el grupo restante presentó algunos errores. De la totalidad de los grupos, uno representó solamente los puntos; ocho grupos graficaron los puntos uniéndolos con segmentos de recta, y los 10 grupos restantes graficaron los puntos uniéndolos con líneas curvas como se muestra en la Figura 5.

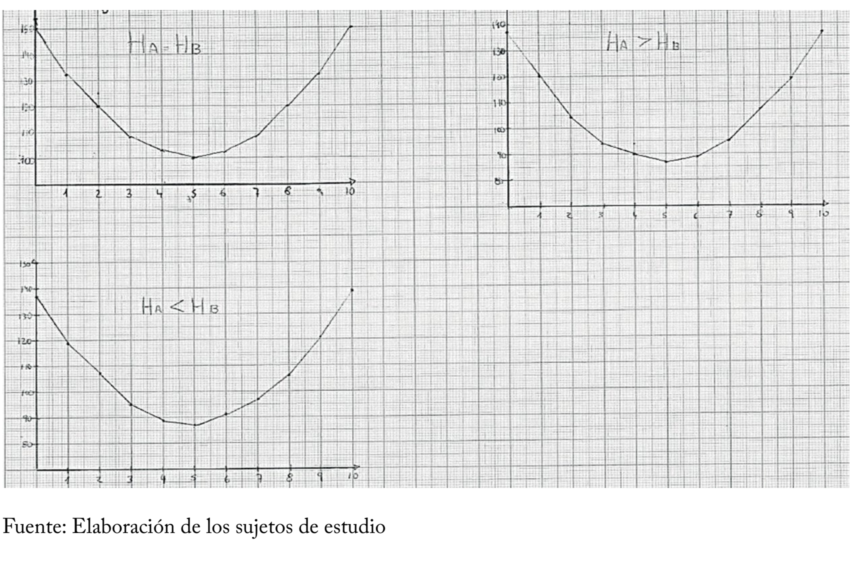
Figura 5. Producción de los estudiantes



Fuente: Elaboración de los sujetos de estudio

A continuación, se les pidió graficar los puntos (C, $l_1^2 + l_2^2$). De los 19 grupos, 17 graficaron correctamente los valores, y los dos grupos restantes presentaron algunos errores. En la Figura 6 se muestra la producción de uno de los grupos (nótese que unieron los puntos con segmentos de recta).

Figura 6. Producción de los estudiantes



Fuente: Elaboración de los sujetos de estudio

Se presentó a los estudiantes la siguiente pregunta: ¿Es lineal la relación que existe entre las variables C y $\ell_1 + \ell_2$? ¿Por qué? De los 19 grupos, 18 respondieron correctamente esta pregunta, el grupo restante, a pesar de haber coincidido con los demás en que la relación no era lineal, argumentó de manera errada. Algunas respuestas de los grupos se presentan a continuación:

- “No, la relación no es lineal, porque no es una línea recta, no pasa por el punto de origen y las distancias entre los puntos no son proporcionales”.
- “La relación no es lineal, ya que no pasa por el origen, no forma una línea recta y las relaciones no son directamente proporcionales”.
- “La relación que existe entre las variables C y $\ell_1 + \ell_2$ no es lineal, ya que este gráfico corresponde a una función cuadrática. No pasa por el origen”.
- “La relación que existe entre las variables C y $\ell_1 + \ell_2$ no es lineal, porque hace una curva y no pasa por el origen”.
- “No es una recta, va obteniendo valores variados a medida que crecen los valores que toma el eje X, representando a C”.
- “No es lineal, ya que no es una línea recta”.
- “No es lineal, porque es una recta que no pasa por el origen del plano cartesiano”.

En este punto, los estudiantes asociaron la *relación lineal* con *función lineal*. Una función es lineal cuando la razón de cambio entre las variables dependiente e independiente es constante y además la imagen de la función evaluada en cero es cero; en cambio, se dice que la relación entre dos variables es lineal cuando la razón de cambio entre ellas es constante, sin que su gráfica necesariamente pase por el origen. Pese a esta confusión, los estudiantes constataron que el gráfico obtenido no correspondía a una línea recta.

Los estudiantes respondieron luego la siguiente pregunta: ¿Es lineal la relación que existe entre las variables C y $\ell_1^2 + \ell_2^2$? ¿Por qué? De los 19 grupos, 18 respondieron correctamente esta pregunta (es decir, que la relación no es lineal); el grupo restante a pesar de haber coincidido con los demás en que la relación no era lineal, argumentó de manera errada. Los argumentos entregados por los estudiantes fueron similares a los de la pregunta anterior.

Se pidió a los estudiantes que para cada caso indiquen en qué lugar debe ubicarse el transformador *C*, para resolver el problema planteado. Para ejemplificar, en el caso $H_A = H_B$, 15 grupos indicaron que el transformador *C* debía ubicarse en un único punto, de los cuales 14 dieron la respuesta correcta, es decir, que el transformador debía ubicarse sobre el segmento $\overline{PQ}$, a 5 cm de *P*. Tres grupos indicaron que el transformador podría ubicarse en dos puntos; y el grupo restante señaló que el transformador podría ubicarse en tres puntos distintos. De todos los grupos sólo uno dio una respuesta correcta a los tres casos.

Finalmente, se pidió a los estudiantes que comparen las columnas $\ell_1 + \ell_2$ y $\ell_1^2 + \ell_2^2$ de la tabla y los gráficos de los puntos $(C, \ell_1 + \ell_2)$ y $(C, \ell_1^2 + \ell_2^2)$, respondiendo la siguiente pregunta: ¿Qué puede decir sobre los valores mínimos de $\ell_1 + \ell_2$ y $\ell_1^2 + \ell_2^2$ con respecto a la ubicación del punto *C*?. En el caso $H_A = H_B$, 17 grupos dieron la respuesta correcta, es decir, indicaron que los valores mínimos con respecto a la ubicación del punto *C* se obtienen en la misma posición. Lo curioso es que en los casos $H_A > H_B$ *y* $H_A < H_B$ el número de respuestas correctas disminuyó considerablemente: 5 y 4 grupos dieron la respuesta correcta, respectivamente.

7.1.2 Análisis Desde el Punto de Vista del Ciclo de Kolb

En concordancia con Sandoval et al. (2014), la representación esquemática del problema y la organización de los datos en la tabla corresponden a la etapa de *Experiencia Concreta*, dado que los estudiantes transfieren el problema desde su realidad física a un contexto matemático, y realizan las mediciones necesarias para resolverlo. Con esto, los estudiantes se involucran en una experiencia nueva. Cabe señalar que todos los estudiantes desarrollaron esta actividad exitosamente, sin embargo, se vieron enfrentados a una primera dificultad, que tuvo relación con el uso del material entregado, pues no conocían el papel milimetrado, no obstante, esto se presenta también como un acierto, ya que provoca novedad y expectación en ellos. El uso de la regla se presentó como otra dificultad, puesto que muchos estudiantes medían a partir del uno.

Graficar los datos en una hoja milimetrada también forma parte de la *Experiencia Concreta*, y su objetivo es organizar la información de tal manera que se pueda dar paso al desarrollo de la *Observación Reflexiva*, y, de este modo, obtener una respuesta al problema.

A partir de los datos obtenidos por las mediciones, se realiza la *Observación Reflexiva*, con la cual se busca dar una primera solución aproximada al problema. En este punto, los estudiantes se detienen a observar la experiencia y si bien todos dan una respuesta, solamente un grupo plantea la solución correcta. En una etapa posterior se pide a los estudiantes retomar su trabajo (etapa de Experimentación Activa) y que argumenten las posibles causas de sus errores. Se espera que muchos de ellos apunten al error humano de medición. Posterior a esta experiencia y registro de datos, los alumnos quedan preparados para pasar a la etapa de *Conceptualización Abstracta*.

Luego de esta actividad el Ciclo de Kolb no se ha cerrado completamente, puesto que las soluciones presentadas por los estudiantes pueden o no ser las correctas, dependiendo del grado de precisión al momento de realizar las mediciones y cálculos (esta situación fue observada y comprendida por los estudiantes). Esto es evidenciado en el hecho que al finalizar la Actividad 1, sólo un grupo obtuvo la respuesta correcta al problema.

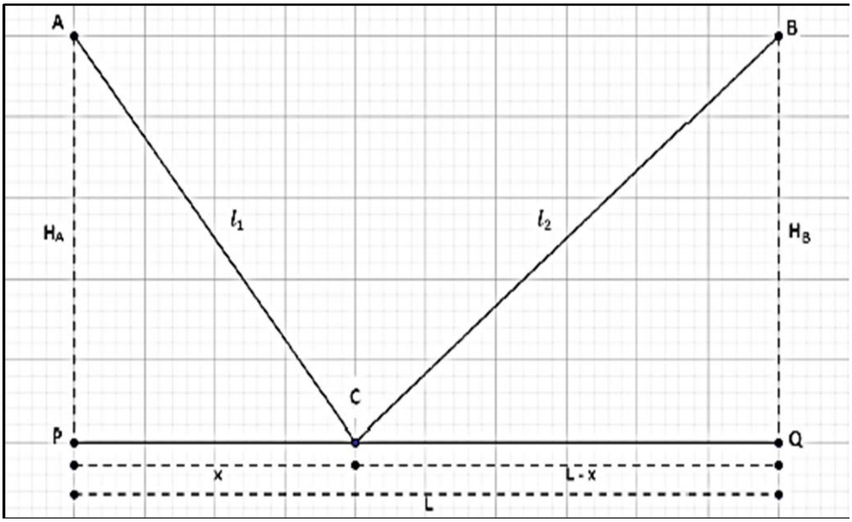
7.2 Sesión 2

7.2.1 Producciones de los Estudiantes

Al problema original se añade la variable x, que es igual a la distancia entre P y C, con el fin de construir la función $\ell(x) = \ell_1(x) + \ell_2(x)$, como se muestra en la Figura 7.

Se pidió a los estudiantes que expresen las medidas ℓ_1 y ℓ_2 como funciones de la variable x, considerando que para cada caso los valores de H_A, H_B y L son constantes. Se esperaba que los estudiantes notaran que se podía utilizar el Teorema de Pitágoras para realizar esta tarea, no obstante, fue necesario darles la indicación, ya que solo uno de los estudiantes realizó esta observación.

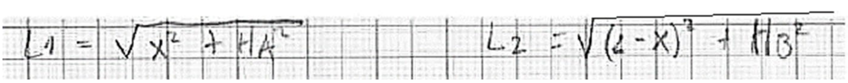
Figura 7. Representación esquemática del problema presentada a los estudiantes



Fuente: Elaboración de los autores

Todos los grupos desarrollaron correctamente este ítem; sin embargo, presentaron dificultades al aplicar el Teorema de Pitágoras a un contexto no habitual. Los estudiantes obtuvieron una expresión para l_1 y l_2 como se muestra en la Figura 8.

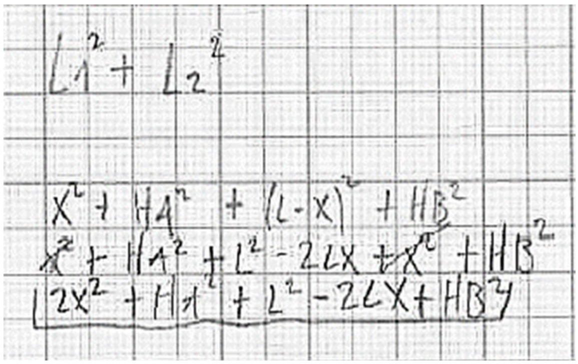
Figura 8. Producción de los estudiantes



Fuente: Elaboración de los sujetos de estudio

Luego, los estudiantes debían simplificar la expresión $l_1^2 + l_2^2$. Todos los grupos realizaron correctamente este ítem. La Figura 9 corresponde a la producción de uno de los grupos.

Figura 9. Producción de los estudiantes



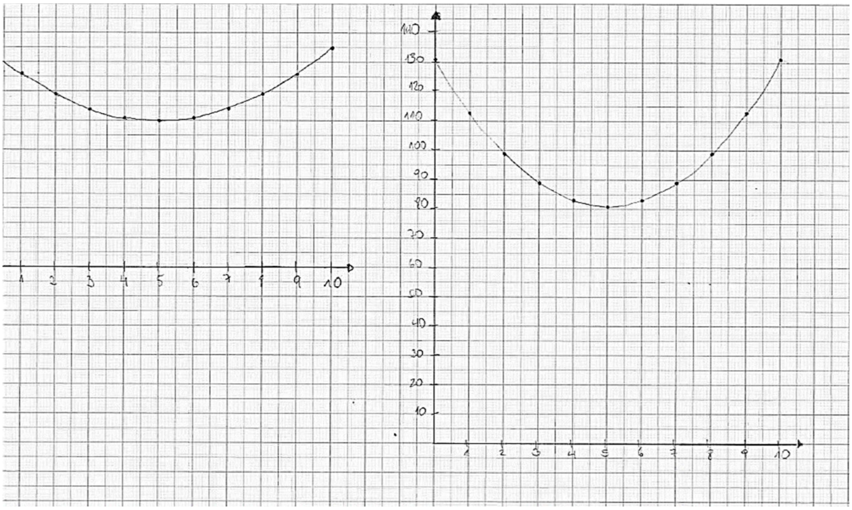
Fuente: Elaboración de los sujetos de estudio

Los estudiantes respondieron las siguientes preguntas: ¿Es lo mismo minimizar la función $\ell_1(x) + \ell_2(x)$ que la función $\ell_1^2(x) + \ell_2^2(x)$? ¿por qué?, ¿Con cuál de las dos funciones crees que es más sencillo trabajar?, ¿por qué? De los 19 grupos, 14 respondieron que es lo mismo minimizar ambas funciones: dos grupos respondieron que no es lo mismo; otros dos dijeron que dependía del caso que se esté analizando y el grupo restante no respondió a esta pregunta. En cuanto a la pregunta sobre cuál expresión resulta más fácil de trabajar, 16 grupos señalaron que es más fácil trabajar con la expresión $\ell_1^2 + \ell_2^2$ y, por el contrario, los 3 grupos restantes dijeron que resulta más sencillo trabajar con la expresión $\ell_1 + \ell_2$.

Se define la función $f(x) = \ell_1^2(x) + \ell_2^2(x)$. La siguiente tarea consistió en valuar $f(x)$ en $x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y en cada caso comparar las imágenes con los obtenidos en la tabla de la Sesión 1. En este ítem uno de los grupos indicó que había obtenido los mismos resultados, dos grupos dijeron que para el caso $H_A = H_B$ obtuvieron los mismos resultados que en la Sesión 1 y que para los otros casos obtuvieron resultados similares. Los 16 grupos restantes señalaron que habían obtenido resultados similares a los de la Sesión 1, argumentando que los resultados no eran exactamente iguales, debido a que el cálculo por medio de la evaluación de la función resultaba ser más exacto que los valores obtenidos por medio de la medición con regla.

Se solicitó a los estudiantes graficar la función $f(x)$. En este ítem, 17 grupos graficaron las funciones de manera correcta. Un grupo solo representó los puntos en el plano, 7 grupos unieron los puntos con segmentos de recta y 11 grupos lo hicieron por medio de líneas curvas. La Figura 10 corresponde a la producción de uno de los grupos.

Figura 10. Producción de los estudiantes



Fuente: Elaboración de los sujetos de estudio

Finalmente, los estudiantes debían dar respuesta al problema inicial y comparar sus resultados con la respuesta dada en la Sesión 1. Todos los grupos coincidieron en que para los tres casos el transformador *C* debía ubicarse sobre el segmento $\overline{PQ}$, a 5 cm de *P*.

7.2.2 Análisis desde el punto de vista del Ciclo de Kolb

En concordancia con Sandoval et al. (2014), la actividad realizada en la Sesión 2 corresponde principalmente a la *Conceptualización Abstracta*, dado que en este punto los estudiantes mediante la observación reflexiva se percatan que pueden utilizar el Teorema de Pitágoras para construir un modelo del problema, por consiguiente, han sido capaces de crear un concepto que integra sus observaciones dentro de un marco teórico coherente. Este modelo corresponde a una función cuadrática, concepto que se quiere abordar en clases, además surge la noción de vértice de una función cuadrática, ya que este punto permite dar solución al problema. Es importante señalar que los estudiantes, salvo uno, no notaron que podían usar el Teorema de Pitágoras para desarrollar la tarea solicitada. Bajo el marco del aprendizaje experiencial, se esperaba generar discusión que probaran distintas formas de realizar la tarea, hasta obtener un método que les permitiera obtener una expresión que relacionara las medidas de los lados, sin embargo, esta discusión no se generó y en su lugar los estudiantes comenzaron a pedir la solución al profesor.

Al expresar $\ell_1^2 + \ell_2^2$ como función en la variable x, se presenta por primera vez la función cuadrática. El consultar a los estudiantes si minimizar la función $\ell_1 + \ell_2$ es lo mismo que minimizar la función $\ell_1^2 + \ell_2^2$ corresponde también a la etapa de *Conceptualización Abstracta* y el objetivo de esto es acercar a los estudiantes a las técnicas de optimización.

En cuanto al proceso de Modelamiento Matemático, el objeto matemático que mejor captura la relación entre las variables es la función $\ell(x) = \ell_1(x) + \ell_2(x)$, obteniendo así un primer Modelo Matemático. Como se necesita resolver un problema, es necesario manipular este primer modelo para obtener uno más simple, en este caso la función $f(x) = \ell_1^2 + \ell_2^2$.

Al comparar los resultados obtenidos, usando el modelo matemático con los resultados de la *Experiencia Concreta* (medición con regla), los estudiantes realizan la *Experimentación Activa*, pues ellos utilizan su modelo para la toma de decisiones y resolución de problemas Sandoval et al. (2014).

Dar la respuesta al problema corresponde a la *Conceptualización Abstracta*, ya que la respuesta al problema corresponde al vértice de la función cuadrática, también a la *Observación Reflexiva* pues los estudiantes deben interpretar la gráfica y decidir cuál es el punto que da respuesta al problema, y, por último, la *Experimentación Activa*, ya que se les solicita comparar sus respuestas con las dadas en la *Experiencia Concreta*.

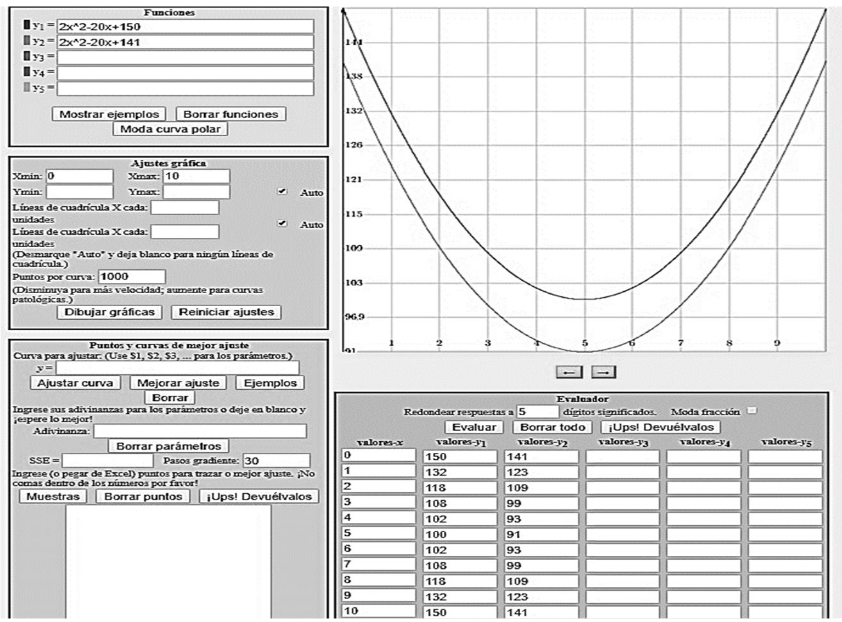
Con la Sesión 2 se recorre el Ciclo de Kolb completamente.

7.3 Sesión 3

7.3.1 Producciones de los estudiantes

Esta actividad consiste en graficar las funciones obtenidas en la Actividad 2 por medio de un software. Para ello se utilizó el evaluador y graficador de funciones (V 3.4) que se encuentra en el link http://www.zweigmedia.com/MundoReal/functions/func.html (recuperado el 27 de abril de 2018).

Figura 11. Producción de los estudiantes



Fuente: Toma de pantalla de la producción de los sujetos de estudio

Se seleccionó este software para trabajar esta actividad por las siguientes razones:

- Es gratis y no requiere muchos recursos del computador.
- Presenta una interfaz sencilla de utilizar.
- Permite graficar más de una función en el mismo plano cartesiano,

destacándolas con distintos colores; permite visualizar las coordenadas de los puntos al desplazar el cursor sobre la gráfica y evalúa hasta cinco funciones simultáneamente.

En esta actividad, se solicitó a los grupos que graficaran el modelo encontrado en la Actividad 2 y compararan la gráfica generada por el software (Figura 11) con la que ellos esbozaron a mano (Figura 10). Posteriormente, elaboraron las tablas de datos, utilizando el software como se muestra en la Figura 12.

Figura 12. Producción de los estudiantes

Evaluador

Redondear respuestas a 5 dígitos significados. Moda fracción

Evaluar | Borrar todo | ¡Ups! Devuélvalos

valores-x	valores-y_1	valores-y_2	valores-y_3	valores-y_4	valores-y_5
0	150	141			
1	132	123			
2	118	109			
3	108	99			
4	102	93			
5	100	91			
6	102	93			
7	108	99			
8	118	109			
9	132	123			
10	150	141			

Fuente: Toma de pantalla de la producción de los sujetos de estudio

Por último, se pidió a los estudiantes que respondieran el problema inicial basados en la información otorgada por el software. En este punto, los estudiantes no validan el modelo, sino que validan la conclusión obtenida a partir del modelo. Todos los estudiantes coincidieron en que el transformador debería ubicarse en la posición cinco para todos los casos.

7.3.2 Análisis desde el punto de vista del Ciclo de Kolb

La Sesión 3 corresponde principalmente a la *Conceptualización Abstracta* y a la *Experimentación Activa*, dado que se abordan los conceptos de gráfica y vértice de la función cuadrática y también se comparan los resultados obtenidos en la Actividad 2 con aquellos que entrega el software, por tanto, se coloca el énfasis en la utilización de su modelo para la toma de decisiones y validación de resultados.

Los ítems de esta actividad comprenden a más de una etapa del Ciclo de Kolb, *Conceptualización Abstracta*, ya que la respuesta al problema corresponde al vértice de la función cuadrática, también a la *Observación Reflexiva*, pues los estudiantes deben interpretar la gráfica y decidir cuál es el punto que da respuesta al problema. La *Experimentación Activa* en este caso se hizo de manera oral en clases, pidiendo a los estudiantes que comparen su respuesta con las obtenidas en las actividades anteriores.

En esta actividad, los alumnos tuvieron la oportunidad de graficar la función encontrada anteriormente y validar sus mediciones. En este punto, los estudiantes corroboraron que las mediciones no siempre son exactas, ya que está presente el "error humano". Para el desarrollo de esta actividad no se presentaron dificultades, desde el punto de vista del ciclo de Kolb, no obstante, hubiera sido enriquecedor aprovechar la instancia para presentar un nuevo problema y así validar el modelo en una nueva situación problemática.

8. Discusión de los resultados

En los estudiantes surgieron preguntas como; *¿para qué hacemos esto?; ¿esto está en el libro?*, lo que denota una resistencia al cambio, como señalan Pérez y Vásquez (2017) se necesita de un periodo más extenso de trabajo para conseguir cambios significativos en las variables socio afectivas, y además los estudiantes suelen perder su motivación inicial al exigirles un continuo esfuerzo por un periodo prolongado. Considerando los planteamientos de Pérez y Vásquez (2017), se diseñó una intervención breve, donde las actividades de modelización enmarcadas en el Ciclo de Kolb no superaron las tres sesiones de 90 minutos cada una.

El trabajo colaborativo realizado por las parejas, en las actividades de modelamiento matemático, enmarcado en el Ciclo de Kolb, aportó a la reflexión colectiva e individual, generando un ambiente propicio para la discusión matemática dentro del aula.

La metodología de enseñanza propuesta en este trabajo es factible de ser utilizada para el contenido de función cuadrática. Además, se recomienda realizar al menos una experiencia de este tipo por unidad temática, ya que así los estudiantes se familiarizan con el tipo de metodología de enseñanza y esto permitirá una mayor fluidez en el desarrollo del trabajo y resultados más satisfactorios, así como también al término de la experiencia, una mayor eficiencia en el uso de los tiempos. Como lo señala Aravena (2011), hacer un trabajo matemático basado en la resolución de problemas a través del modelado matemático, posee una serie de ventajas, entre las que se destaca: el desarrollo de la capacidad de resolver problemas y el desarrollo de la creatividad; prepara a los estudiantes para aplicar la matemática; desarrolla la capacidad crítica de la matemática en la sociedad; permite una visión completa de ésta, y ayuda a la comprensión de los conceptos y métodos. Además, las bases curriculares actuales presentan el modelado como una habilidad que se debe desarrollar en los estudiantes.

9. Conclusiones

Se pudo observar, en los estudiantes que participaron de la experiencia, un alto compromiso hacia el trabajo desarrollado durante el transcurso de las clases. En cuanto al desarrollo de las actividades, se pudo constatar que, a lo largo de las tres sesiones, los estudiantes recorrieron el Ciclo de Kolb; sin embargo, aún no logran la autonomía suficiente, por lo que fue necesaria la participación del profesor, en más de una ocasión para lograr el objetivo de la actividad. Las principales fortalezas observadas fueron que los estudiantes se mostraron motivados, mantuvieron un buen comportamiento durante el trabajo, y participaron activamente y con dedicación durante el transcurso de la actividad.

Una de las dificultades afrontadas al desarrollar las actividades fue que los estudiantes no estaban familiarizados con el uso de los materiales. Muchos estudiantes no conocían las hojas milimetradas y algunos de ellos utilizaban la regla midiendo desde el uno. Otra dificultad se presentó fue utilizar el Teorema de Pitágoras en un ámbito diferente a la geometría, por lo que se hizo necesario guiar el trabajo de los estudiantes mucho más de lo que se tenía pensado. Los estudiantes se observaban inseguros con respecto a su trabajo autónomo, prueba de esto fue que consultaban todas sus decisiones con el profesor, quien claramente no podía atender a la vez a todos los grupos que se lo solicitaban.

En cuanto a la habilidad de modelar, no fue posible entregar a los alumnos una mayor autonomía para resolver el problema, principalmente por ser una habilidad que requiere ser trabajada y sistematizada en el tiempo, por lo que puede afirmarse que el desarrollo de esta habilidad es aún incipiente.

En cuanto a la cobertura curricular, realizar esta actividad no significó un atraso en la entrega de contenidos, dado que la experiencia concreta previa, que involucra la función cuadrática, se materializó como un elemento *subsunsor* que permitió anclar los nuevos conocimientos y progresar con celeridad.

En el transcurso de la experiencia, los estudiantes logran recorrer las cuatro etapas del Ciclo de Kolb, construyendo un modelo matemático de una situación en contexto y dando respuesta a un problema, por lo que podemos decir que se cumplieron los objetivos de la intervención, pese a las dificultades que surgieron durante el desarrollo de esta.

Referencias

Agencia de Calidad de la Educación (2017). *Aprendiendo de los errores. Un análisis de los errores frecuentes de los estudiantes de II medio en las pruebas Simce y sus implicancias pedagógicas*. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/Aprendiendo_de_los_errores.pdf

Aravena, M. (2011). Resolución de problemas y modelización geométrica en la formación inicial de profesores. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado de: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/859/145.

Aravena, M., y Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca. *Estudios Pedagógicos, 33*(2), 7-25.

Aravena, M., Caamaño, C., y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(1), 49-92.

Coll, C. (1988). Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo. *Revista Infancia y Aprendizaje* (41), 1 -11.

Díaz, F. y Barriga, A. (2010). Los profesores ante las innovaciones curriculares. *Revista Iberoamericana de educación superior, 1*(1), 37-57.

Edecsa Asesorías y Estudios (2018). *Estudio de exploración y análisis de los procesos de implementación curricular en el sistema educacional chileno*. Recuperado de: https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-70906_archivo_01.pdf

Hernández R., Fernández C. y Baptista M. (2010). *Metodología de la Investigación, quinta edición*. México: Mc Graw Hill.

Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*, Santiago de Chile.

Pérez, A., y Vásquez, N. (2017). *Educación Matemática Realista: un enfoque para desarrollar habilidades de Matematización con alumnos de secundaria* [Tesis de pregrado, Universidad de Concepción, Los Ángeles, Chile].

Sarmiento, M. (2004). *La Enseñanza de las Matemáticas y las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación*. Tarragona: Universitat Rovira i Virgili.

Sandoval, V., Peña, M., Carrasco, V., González, C., Yáñez, S., Cariaga, E., y Colipe, E. (2014). *50 Ciclos de Kolb y 2 razones para ser utilizados*. Temuco: Universidad Católica de Temuco. Chile.

Recibido: 28.08.2019 Aceptado: 06.02.2020